BỘ LỌC KALMAN MỞ RỘNG
(Extended Kalman Filter)

Nguyễn Văn Hân
Bộ môn: Điện tử - Tự động
Khoa: Điện – Điện tử

Nội dung

- Giới thiệu
- Bộ lọc Kalman mở rộng
- Ví dụ

Giới thiệu

- Bài toán ước lượng trạng thái hệ thống (dynamic system state estimation)
  - Giả sử trạng thái của một hệ thống biến đổi tại thời điểm k liên hệ với trạng thái k-1 bởi phương trình trạng thái: $\mathbf{x_k=f(x_{k-1},u_{k-1}) + W_{k-1}}$ (với W_{k-1} là nhiễu hệ thống)
  - Đo lường (measurement) của hệ thống có quan hệ với trạng thái hệ thống qua phương trình đo lường: $\mathbf{z_k=g(x_k) + V_k}$ (với V_k là nhiễu đo lường)
  - Nhiệm vụ của bộ lọc là dựa vào quan sát và mô hình hệ thống để ước lượng tối ưu (có thể) trạng thái của hệ thống.

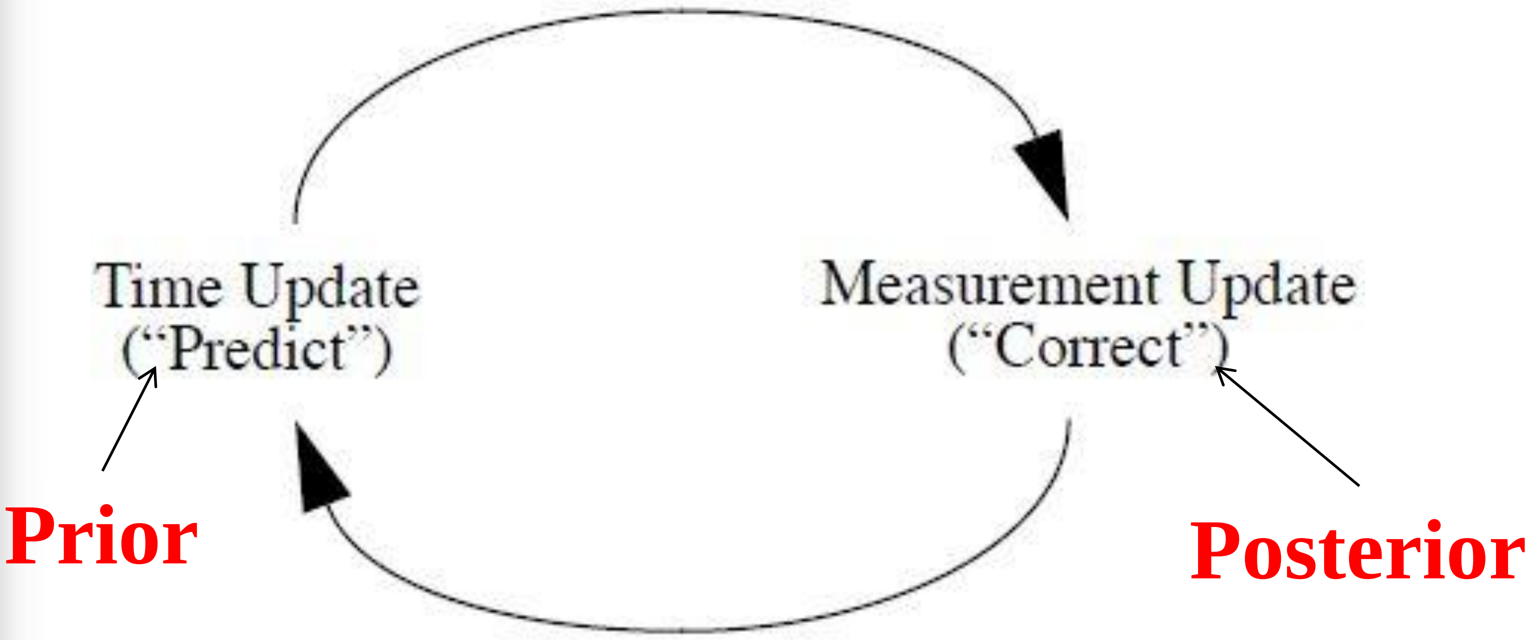
Giới thiệu (2)

- Nếu cả hai phương trình trên là tuyến tính và nhiễu hệ thống và nhiễu đo lường là nhiễu Gaussian thì bộ lọc Kalman tuyến tính (LKF) là bộ lọc tối ưu được sử dụng cho trường hợp này
- Nếu ít nhất một trong hai phương trình trên là phi tuyến và nhiễu tác động không phải là nhiễu Gaussian thì cần phải tuyến tính hóa 2 phương trình trên
- Tuyến tính hóa hàm phi tuyến dựa vào xấp xỉ Taylor bậc 1 → **Bộ lọc Kalman mở rộng**

Bộ lọc Kalman

- Bộ lọc Kalman (do **Adolf Kalman** đưa ra năm 1960) là một nhánh của bộ lọc thích nghi (adaptive filter). Ý tưởng xây dựng bộ lọc Kalman tương tự như bộ lọc đệ quy Bayes
  - Biết trước xác suất tiền nghiệm (prior probability) ← phương trình trạng thái
  - Xác suất tiền nghiệm được cập nhật bởi xác suất hậu nghiệm (posterior probability) ← phương trình đo lường
  - Sau một số bước đệ quy sẽ xác định được trạng hệ thống

Bộ lọc Kalman (2)



Bộ lọc Kalman (3)

Time Update ("Predict")

(1) Project the state ahead

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$$

(2) Project the error covariance ahead

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

Measurement Update ("Correct")

(1) Compute the Kalman gain

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

(2) Update estimate with measurement z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

(3) Update the error covariance

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

Initial estimates for $\hat{x}_{k-1}$ and P_{k-1}

Bộ lọc Kalman mở rộng

- Giới hạn:
  - Ít nhất một trong hai phương trình (trạng thái, đo lường) là phi tuyến
  - Nhiễu là nhiễu Gaussian (nhiễu trắng, nhiễu cộng)
- Tuyến tính hóa hai phương trình bằng xấp xỉ Taylor bậc 1

$$x_k \approx \tilde{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W w_{k-1}$$

$$z_k \approx \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + V v_k .$$

A và H là các ma trận Jacobian

Bộ lọc Kalman mở rộng (2)

Initial estimates for $\hat{x}_k^-$ and P_k^-

Time Update ("Predict")

(1) Project the state ahead

$$\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k, u_k, 0)$$

(2) Project the error covariance ahead

$$P_{k+1}^- = A_k P_k A_k^T + W_k Q_k W_k^T$$

Measurement Update ("Correct")

(1) Compute the Kalman gain

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1}$$

(2) Update estimate with measurement z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - h(\hat{x}_k^-, 0))$$

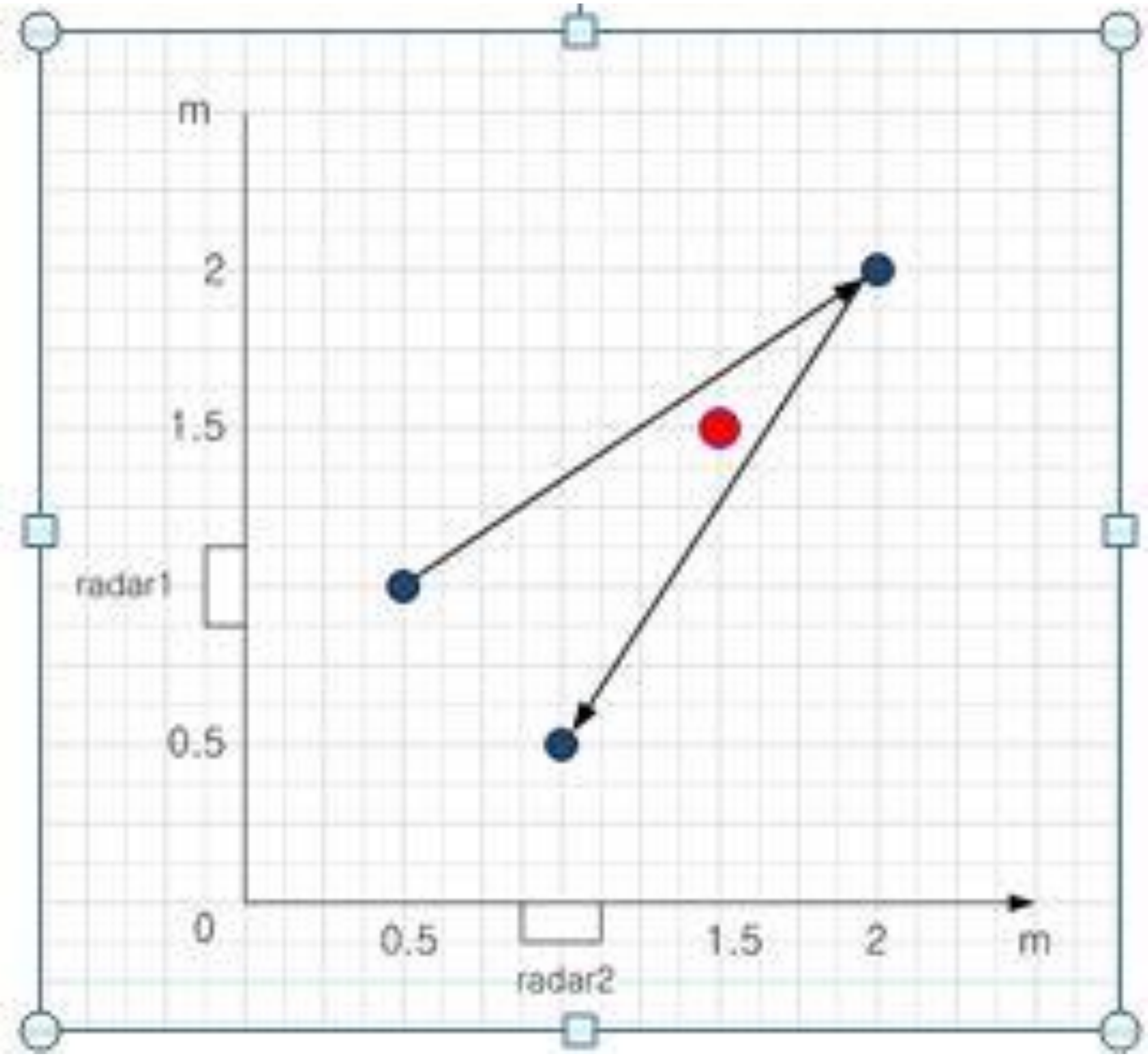
(3) Update the error covariance

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$$

Ví dụ

- Giả sử cần xác định vị trí của một vật trong hệ trục tọa độ x,y bằng 2 radar (như hình vẽ dưới đây). Vị trí của vật được xác định bởi tọa độ của nó, giả sử là (dx,dy). Khi vật di chuyển, dựa vào các đo lường của 2 radar ta có thể xác định được đường đi của vật trong hệ trục tọa độ (nên nhớ 2 radar chỉ đo lường được khoảng cách từ nó tới vật - dựa vào tín hiệu phản xạ, chứ không "đo" được tọa độ của vật)

Ví dụ (2)



Ví dụ (3)

- Để áp dụng EKF, trước hết phải xác định các phương trình trạng thái và phương trình đo lường. Trong trường hợp này trạng thái của vật là: $\mathbf{x_k = [dx_k, vx_k, dy_k, vy_k]}$ với dx, dy, vx, vy là tọa độ và vận tốc của vật theo phương x và y.
- Phương trình trạng thái của vật tuân theo phương trình chuyển động, và là tuyến tính:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} = \begin{bmatrix} dx_k \\ vx_k \\ dy_k \\ vy_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_{k-1} + vx_{k-1}t + a\frac{t^2}{2} \\ vx_{k-1} + at \\ dy_{k-1} + vy_{k-1} + a\frac{t^2}{2} \\ vy_{k-1} + at \end{bmatrix} + w_{k-1} = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

Ví dụ (4)

- Phương trình đo lường (phi tuyến)

$$z_k = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = g(x_k) + v_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(dx - X_1)^2 + (dy - Y_1)^2} \\ \sqrt{(dx - X_2)^2 + (dy - Y_2)^2} \end{bmatrix} + v_k$$

Với:

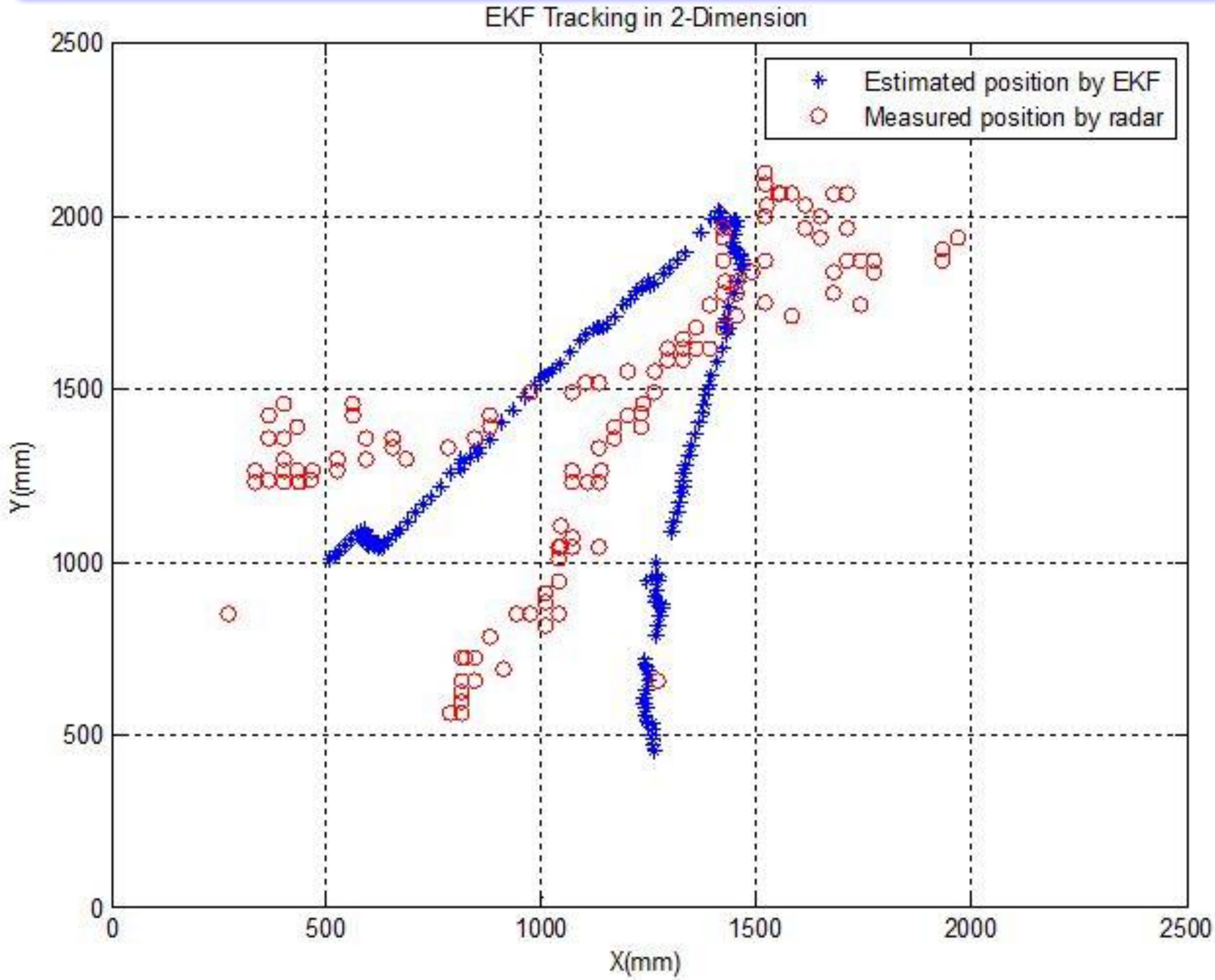
$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}$$

Ví dụ (5)

- Hệ các phương trình EKF được áp dụng như trên, với các ma trận Jacobian của hàm trạng thái và hàm đo lường theo nhiễu (Vk và Wk) đều là I (ma trận đơn vị) vì ta coi nhiễu là nhiễu Gaussian và không đổi theo thời gian
- Chỉ có ma trận H là ma trận Jacobian, được xác định như sau:

$$H_k = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_k - X_1}{\sqrt{(dx_k - X_1)^2 + (dy_k - Y_1)}}, 0, \dfrac{dy_k - Y_1}{\sqrt{(dx_k - X_1)^2 + (dy_k - Y_1)}}, 0 \\ \dfrac{dx_k - X_2}{\sqrt{(dx_k - X_2)^2 + (dy_k - Y_2)}}, 0, \dfrac{dx_k - Y_2}{\sqrt{(dx_k - X_2)^2 + (dy_k - Y_2)}}, 0 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ (6): Kết quả



Tham khảo

- *An introduction to Kalman Filter*, by G. Welch and G. Bishop (2006).